6.3 二项式定理重难点题型精讲

一 、知识梳理

(一) 二项式定理

一般地,对于任意正整数n,都有

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^0 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^0 a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^0 b^k$.(*)

公式 (*) 叫做二项式定理,等号右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的二项展开式,其中各项的系数 C_n^0 $(k \in \{0,1,2,\cdots,n\})$ 叫做二项式系数,$C_n^0 a^{n-k} b^k$ 叫做二项展开式的通项,用 T_{k+1} 表示,即通项为展开式的第 $k+1$ 项:$T_{k+1} = C_n^0 a^{n-k} b^k$.

(2) 二项展开式的规律

①二项展开式一共有 $(n+1)$ 项.

② $(n+1)$ 项按 a 的降幂 b 的升幂排列.

③每一项中 a 和 b 的幂指数之和为 n.

(二) 二项式系数的性质

(1) 杨辉三角 — — 二项式系数表

当 n 依次取 1,2,3, $\cdots$ 时,观察 $(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数:

$(a+b)^1$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ C_1^0 C_1^1 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1 1

$(a+b)^2$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ C_2^0 C_2^1 C_2^2 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1 2 1

$(a+b)^3$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1 3 3 1

$(a+b)^4$ $\cdots\cdots\cdots$ C_4^0 C_4^1 C_4^2 C_4^3 C_4^4 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 1 4 6 4 1

$(a+b)^5$ $\cdots\cdots$ C_5^0 C_5^1 C_5^2 C_5^3 C_5^4 C_5^5 $\cdots\cdots\cdots$ 1 5 10 10 5 1

$(a+b)^6$ $\cdots$ C_6^0 C_6^1 C_6^2 C_6^3 C_6^4 C_6^5 C_6^6 $\cdots$ 1 6 15 20 15 6 1

$\cdots$ $\cdots$

从中我们可以看出,左侧三角是根据二项式定理得到的,右侧三角是算出对应的组合数的值后所得结果,由此我们可以发现以下性质:

①每一行中的二项式系数是对称的,如第一项与最后一项的二项式系数相等,第二项与倒数第二项的二项式系数相等.

②每一行两端都是 1,而且从第二行起,除 1 以外的每一个数都等于它“肩上”两个数的和.

③从第二行起,每一行的二项式系数从两端向中间逐渐增大.

④第一行的两个数之和为 $2=\cdots$,第二行的三个数之和为 $4=2^2$,$\cdots$,第六行的各数之和为 2^2 ,$\cdots$,第 n 行的 $(n+1)$ 个数之和为 2^2 .

(2) 二项式系数的性质

对称性	与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等(即 $C_n^m=C_n^{n-m}$)
增减性	当 $k<\frac{n+1}{2}$时,二项式系数逐渐增大;当 $k>\frac{n+1}{2}$时,二项式系数逐渐减小,因此二项式系数在中间取得最大值
最大值	当 n 是偶数时,展开式的中间一项 $T_{\frac{n}{2}+1}$的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大;当 n 是奇数时,展开式的中间两项 $T_{\frac{n+1}{2}}$与 $T_{\frac{n+1}{2}+1}$的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$,$C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等且最大
各二项式系数的和	$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$
	$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$

二 、题型精析

（一）【题型 1 求展开式的特定项或特定项的系数】

【方法点拨】

二项展开式的通项的主要作用是求展开式中的特定项，常见的题型有：①求第 k 项；②求含 b^k（或 $x^p y^q$）的

项；③求常数项；④求有理项. 其中求有理项时，一般根据通项，找出未知数的指数，令其为整数，再根据

整数的整除性求解. 另外，若通项中含有根式，一般把根式化为分数指数幂，以简化运算.

【例1】二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中常数项为（　　）

A. 80　　B. -80　　C. -40　　D. 40

【解题思路】求出展开式的通项，再令 x 的指数等于 0，即可得出答案.

【解答过程】解：二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k(\sqrt{x})^{5-k}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=$

$(-2)^k C_5^k x^{\frac{15-5k}{6}}$，

令 $\frac{15-5k}{6}=0$，则 $k=3$，所以常数项为 $(-2)^3C_5^3=-80$.

故选：B.

【例2】$(x-2)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为（　　）

A. 40　　B. -40　　C. 80　　D. -80

【解题思路】首先写出展开式的通项，再代入计算可得；

【解答过程】$(x-2)^5$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-2)^r$，令 $5-r=3$，解得 $r=2$，

所以 $T_3=C_5^2x^3(-2)^2=40x^3$，所以 x^3 项的系数为 40，

故选：A.

【例3】$\left(2x-\frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 -160，则 a 的值为（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

【解题思路】由已知，根据二项式列出其展开式的通项，根据要计算的常数项，先计算出 r，然后根据其常数项的系数列出关于 a 的方程，解方程即可完成求解.

【解答过程】由已知，$\left(2x-\frac{a}{x}\right)^6$ 展开式的通向为 $T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}\left(-\frac{a}{x}\right)^r=C_6^r\cdot2^{6-r}\cdot(-a)^r\cdot x^{6-2r}$，

所以其展开式的常数项即 $6-2r=0$，$r=3$，

所以常数项为 $C_6^3\cdot2^{6-3}\cdot(-a)^3=-160$，解得 $a=1$.

故选：A.

【例4】$\left(x-\frac{2}{x}\right)^{10}$ 展开式中第 5 项的系数是（　　）

A. C_{10}^4　　B. $C_{10}^4 2^4$　　C. $-C_{10}^5$　　D. $-C_{10}^5 2^5$

【解题思路】区分二项式系数和项的系数的区别，并求出展开式中项对应的系数，即可求解

【解答过程】$\left(x-\frac{2}{x}\right)^{10}$ 展开式中第 5 项为 $T_{4+1}=C_{10}^4x^6\left(-\frac{2}{x}\right)^4=C_{10}^4(-2)^4x^2=C_{10}^42^4x^2$.

故选：B.

（二）【题型 2 用赋值法求系数和问题】

赋值法是解决二项展开式中项的系数和问题的常用方法. 根据题目要求，灵活赋值是解题的关键.

【例5】$(1+x)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=$ (　　)

A. 1　　B. 3　　C. 0　　D. -3

【解题思路】根据展开式，利用赋值法取 $x=-1$ 即得.

【解答过程】因为 $(1+x)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，

令 $x=-1$，可得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=(1-1)^4=0$.

故选：C.

【例6】若 $(x+y)^6=a_0y^6+a_1xy^5+a_2x^2y^4+\cdots+a_6x^6$，则 $(a_0+a_2+a_4+a_6)^2-(a_1+a_3+a_5)^2$ 的值为 (　　)

A. 0　　B. 32　　C. 64　　D. 128

【解题思路】先利用赋值法求得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$ 和 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ 的值，进而求得 $(a_0+a_2+a_4+a_6)^2-(a_1+a_3+a_5)^2$ 的值.

【解答过程】$x=1$，$y=-1$ 时，$0=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$，

$x=1$，$y=1$ 时，$64=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$，

$(a_0+a_2+a_4+a_6)^2-(a_1+a_3+a_5)^2$

$=(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6)(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=0\times64=0$，

故选：A.

【例7】若 $(3x-1)^7=a_7x^7+a_6x^6+\cdots a_1x+a_0$，则 $a_7+a_6+\cdots a_1$ 的值是 (　　)

A. -1　　B. 127　　C. 128　　D. 129

【解题思路】利用赋值法计算可得.

【解答过程】解：因为 $(3x-1)^7=a_7x^7+a_6x^6+\cdots a_1x+a_0$，

令 $x=0$，可得 $a_0=(-1)^7=-1$，

令 $x=1$，可得 $a_7+a_6+\cdots a_1+a_0=(3-1)^7=128$，

所以 $a_7+a_6+\cdots a_1=128+1=129$；

故选：D.

【例8】已知 $C_n^3=C_n^6$，设 $(2x-3)^n=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_n(x-1)^n$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=$ (　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【解题思路】利用组合数的性质可求得 n 的值，再利用赋值法可求得 a_0 和 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的值，作差可得出所求代数式的值.

【解答过程】因为 $C_n^3=C_n^6$，所以由组合数的性质得 $n=3+6=9$，

所以 $(2x-3)^9=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_9(x-1)^9$，

令 $x=2$，得 $(2\times2-3)^9=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$，即 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=1$.

令 $x=1$，得 $(2\times1-3)^9=a_0=-1$，

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_9=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9)-a_0=1-(-1)=2$，

故选：D.

(三)【题型3 多项式积的展开式中的特定项问题】

对于几个多项式积的展开式中的特定项问题，一般可以根据因式连乘的规律，结合组合思想求

解，但要注意适当地运用分类方法，以免重复或遗漏.

【例9】$\left(\frac{1}{x}-2\right)(1-2x)^4$ 的展开式中，常数项为（　　）

$A.-4$　　$B.-6$　　$C.-8$　　$D.-10$

【解题思路】先求出 $(1-2x)^4$ 展开式的通项公式，然后求出其一次项系数和常数项，从而可求得结果.

【解答过程】$(1-2x)^4$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_4^r(-2x)^r=C_4^r(-2)^r\cdot x^r$，

所以 $\left(\frac{1}{x}-2\right)(1-2x)^4$ 的展开式中，常数项为 $C_4^1\times(-2)+(-2)\times C_4^0=-8-2=-10$，

故选：D.

【例10】$\left(1+\frac{1}{x}\right)(1+x)^4$ 的展开式中含 x^2 项的系数为（　　）

$A.10$　　$B.12$　　$C.4$　　$D.5$

【解题思路】利用二项式定理的通项公式进行分类讨论即可求解.

【解答过程】$(1+x)^4$ 的二项展开式的通项为 $C_4^rx^r$，

当 $r=2$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)(1+x)^4$ 的展开式中含 x^2 项为 $1\cdot C_4^2x^2$；

当 $r=3$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)(1+x)^4$ 的展开式中含 x^2 项为 $\left(\frac{1}{x}\right)\cdot C_4^3x^3$；

所以 $\left(1+\frac{1}{x}\right)(1+x)^4$ 的展开式中含 x^2 项的系数为 $C_4^2+C_4^3=10$.

故选：A.

【例11】二项式 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 展开式中 x^4 的系数为（　　）

$A.120$　　$B.135$　　$C.140$　　$D.100$

【解题思路】利用二项式定理得到 $(1-x)^{10}$ 的展开式通项公式，求出 $T_3=45x^2$，$T_4=-120x^3$，$T_5=210x^4$，进而与 $1+x+x^2$ 对应的系数相乘，求出展开式中 x^4 的系数.

【解答过程】$(1-x)^{10}$ 的展开式通项公式为 $T_{r+1}=C_{10}^r(-x)^r=C_{10}^r(-1)^rx^r$，

其中 $T_3=C_{10}^2x^2=45x^2$，$T_4=-C_{10}^3x^3=-120x^3$，$T_5=C_{10}^4x^4=210x^4$，

故二项式 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 中 x 的四次方项为 $45x^2\cdot x^2-120x^3\cdot x+210x^4\cdot 1=135x^4$，

即展开式中 x^4 的系数为 135.

故选：B.

【例12】若 $(2-ax)(1+x)^4$ 展开式中 x^3 的系数为 2，则 $a=$（　　）

$A.1$　　$B.-1$　　$C.-\frac{1}{3}$　　$D.2$

【解题思路】展开式中 x^3 项的产生一部分来源于 2 与 $(1+x)^4$ 中 x^3 项相乘，另一部分来源于 $-ax$ 与 $(1+x)^4$ 中 x^2 项相乘，可求 a.

【解答过程】$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$，$(2-ax)(1+x)^4$ 展开式中 x^3 的系数为 2

所以 $8-6a=2$，解得 $a=1$

故选：A.

(四)【题型 4 求展开式中系数最大的项的方法】

由于展开式中各项的系数是离散型变量，因此，

(1) 在系数符号相同的前提下，求系数的最大 (小) 值，只需比较两组相邻两项系数的大小，根据通

项正确地

列出不等式组 $\begin{cases} T_{+1} \geqslant T_1, \\ T_{n+1} \geqslant T_{r+2} \end{cases}$ $\left(\begin{cases} T_{r+1} \leqslant T_n, \\ T_{n+1} \leqslant T_n + 2 \end{cases}\right)$ 即可.

(2) 当各项系数正负相间时,求系数的最大值应在系数都为正的各项系数间构造不等式组;求系数的最小值

应在系数都为负的各项系数间构造不等式组.

【例13】在 $(3x-2y)^{20}$ 的展开式中,系数绝对值最大项是( )

A. 第 10 项　　B. 第 9 项　　C. 第 11 项　　D. 第 8 项

【解题思路】根据二项式的通项公式进行求解即可.

【解答过程】二项式 $(3x-2y)^{20}$ 的通项公式为:$T_{r+1}=C_{20}^{r}\cdot(3x)^{20-r}\cdot(-2y)^{r}$,

设第 $r+1$ 项的系数绝对值最大,

所以有 $\begin{cases} C_{20}^{r}\cdot 3^{20-r}\cdot|(-2)^{r}| \geqslant C_{20}^{r+1}\cdot 3^{20-r-1}\cdot|(-2)^{r+1}| \\ C_{20}^{r}\cdot 3^{20-r}\cdot|(-2)^{r}| \geqslant C_{20}^{r-1}\cdot 3^{20-r+1}\cdot|(-2)^{r-1}| \end{cases} \Rightarrow \frac{37}{5} \leqslant r \leqslant \frac{42}{5}$,

因为 $r \in N^{*}$,所以 $r=8$,所以系数绝对值最大项是第 9 项,

故选:B.

【例14】若 $(2+ax)^{n}(a \neq 0)$ 的展开式中各项的二项式系数之和为 512,且第 6 项的系数最大,则 a 的取值范围为( )

A. $(-\infty,0) \cup [2,3]$　　B. $(-\infty,0) \cup \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$

C. $[2,3]$　　D. $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$

【解题思路】计算 $n=9$,计算 $T_6=C_9^5 2^4(ax)^5$, $T_5=C_9^4 2^5(ax)^4$, $T_7=C_9^6 2^3(ax)^6$,根据系数的大小关系得到 $\begin{cases} C_9^5 2^4 a^5 \geqslant C_9^4 2^5 a^4 \\ C_9^5 2^4 a^5 \geqslant C_9^6 2^3 a^6 \end{cases}$,解得答案.

【解答过程】$2^n=512$, $n=9$, $T_6=C_9^5 2^4(ax)^5$, $T_5=C_9^4 2^5(ax)^4$, $T_7=C_9^6 2^3(ax)^6$,

$\because$ 第 6 项的系数最大,$\therefore \begin{cases} C_9^5 2^4 a^5 \geqslant C_9^4 2^5 a^4, \\ C_9^5 2^4 a^5 \geqslant C_9^6 2^3 a^6, \end{cases}$,则 $2 \leqslant a \leqslant 3$.

故选:C.

【例15】已知 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{n}$ 的展开式中只有第 5 项是二项式系数最大,则该展开式中各项系数的最小值为( )

A. -448　　B. -1024　　C. -1792　　D. -5376

【解题思路】先根据二项式系数的性质可得 $n=8$,再结合二项展开式的通项求各项系数 $a_r=(-2)^r C_8^r$,分析列式求系数最小项时 r 的值,代入求系数的最小值.

【解答过程】$\because$ 展开式中只有第 5 项是二项式系数最大,则 $n=8$,

$\therefore$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r(\sqrt{x})^{8-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^{r}=(-2)^r C_8^r x^{\frac{8-3r}{2}}$, $r=0,1,\ldots,8$,

则该展开式中各项系数 $a_r=(-2)^r C_8^r, r=0,1,\ldots,8$

若求系数的最小值,则 r 为奇数且 $\begin{cases} a_r-a_{r+2} \leqslant 0 \\ a_r-a_{r-2} \leqslant 0 \end{cases}$,即 $\begin{cases} (-2)^r C_8^r-(-2)^{r+2}C_8^{r+2} \leqslant 0 \\ (-2)^r C_8^r-(-2)^{r-2}C_8^{r-2} \leqslant 0 \end{cases}$,解得 $r=5$,

$\therefore$ 系数的最小值为 $a_5=(-2)^5 C_8^5=-1792$

故选:C.

【例16】已知 $\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的二项展开式中二项式系数之和为 64，则下列结论正确的是（　　）

A. 二项展开式中各项系数之和为 3^7　　B. 二项展开式中二项式系数最大的项为 $90x^{\frac{3}{2}}$

C. 二项展开式中无常数项　　D. 二项展开式中系数最大的项为 $240x^3$

【解题思路】由二项式系数之和为 64，可得 $2^n=64$，得 $n=6$，所以二项式为 $\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$，然后写出二项式展开式的通式公式 $T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$，然后逐个分析判断.

【解答过程】因为 $\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的二项展开式中二项式系数之和为 64，

所以 $2^n=64$，得 $n=6$，所以二项式为 $\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$，

则二项式展开式的通式公式 $T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r2^{6-r}x^{6-\frac{3}{2}r}$，

对于 A，令 $x=1$，可得二项展开式中各项系数之和为 3^6，所以 A 错；

对于 B，第 4 项的二项式系数最大，此时 $r=3$，则二项展开式中二项式系数最大的项为 $T_4=C_6^32^{6-3}x^{6-\frac{3}{2}\times3}=160x^{\frac{3}{2}}$，所以 B 错；

对于 C，令 $6-\frac{3}{2}r=0$，则 $r=4$，所以二项展开式中的常数项为 $C_6^42^{6-4}x^{6-\frac{3}{2}\times4}=60$，所以 C 错误；

对于 D，令第 r 项的系数最大，则 $\begin{cases}C_6^r2^{6-r}\geqslant C_6^{r-1}2^{6-(r-1)}\\C_6^r2^{6-r}\geqslant C_6^{r+1}2^{6-(r+1)}\end{cases}$，解得 $\frac{5}{3}\leqslant r\leqslant\frac{7}{3}$，

因为 $r\in N^*$，所以 $r=2$ 时，二项展开式中系数最大，

则二项展开式中系数最大的项为 $T_3=C_6^22^4x^3=240x^3$，所以 D 正确，

故选：D.

(五)**【题型 5 利用二项式定理证明整除问题或求余数】**

(1) 利用二项式定理证明整除问题，关键是要巧妙地构造二项式，其基本做法：要证明一个式子能被另一个式子整除，只要证明这个式子按二项式定理展开后的各项均能被另一个式子整除即可.

(2) 用二项式定理处理整除问题时，通常把底数写成除数 (或与除数密切相关的数) 与某数的和或差的形式，再用二项式定理展开，只考虑后面 (或者是前面) 一两项就可以了，要注意余数的范围.

【例17】$2^{50}-1$ 除以 7 的余数是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解题思路】把 2^{50} 转化成 $4\times(7+1)^{16}$，再结合二项展开式即可求解.

【解答过程】$2^{50}=4\times2^{48}=4\times(2^3)^{16}=4\times(7+1)^{16}=4\times(C_{16}^0\cdot7^{16}+C_{16}^1\cdot7^{15}+\cdots+C_{16}^{15}\cdot7+C_{16}^{16})$

$=4\times(C_{16}^0\cdot7^{16}+C_{16}^1\cdot7^{15}+\cdots+C_{16}^{15}\cdot7)+4$，

则 $2^{50}-1=4\times(C_{16}^0\cdot7^{16}+C_{16}^1\cdot7^{15}+\cdots+C_{16}^{15}\cdot7)+3$，

又 $4\times(C_{16}^0\cdot7^{16}+C_{16}^1\cdot7^{15}+\cdots+C_{16}^{15}\cdot7)$ 是 7 的倍数，

故余数为 3.

故选：D.

【例18】设 $a\in Z$，且 $0\leqslant a<13$，若 $51^{2021}+a$ 能被 13 整除，则 a 等于（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 11　　D. 12

【解题思路】由 $51^{2021}=(52-1)^{2021}$ 且 52 可以被 13 整除，即其展开式中不含 52 的项为余项，该余项与 a 的和能被 13 整除，即可得参数值.

【解答过程】由 $51^{2021}=(52-1)^{2021}$，

展开式通项为 $T_{r+1}=C_{2021}^{r}(52)^{2021-r}(-1)^{r}$，

又 52 可以被 13 整除，

所以展开式 $(52)^{2021-r}$ 中 $2021-r\neq 0$ 的项均可被 13 整除，余项为 $T_{2022}=-1$，

要使 $51^{2021}+a$ 能被 13 整除，且 $0\leqslant a<13$，则 $a=1$.

故选：B.

【例19】设 $a\in Z$，且 $0\leqslant a\leqslant 13$，若 $51^{2021}+a$ 能被 13 整除，则 $a=$（　　）

$A.\ 0$　　　　$B.\ 1$　　　　$C.\ 11$　　　　$D.\ 12$

【解题思路】转化为 $51^{2021}+a=(52-1)^{2021}+a$，利用二项式定理求解.

【解答过程】因为 $a\in Z$，且 $0\leqslant a\leqslant 13$，

所以 $51^{2021}+a=(52-1)^{2021}+a=C_{2021}^{0}52^{2021}-C_{2021}^{1}52^{2020}+C_{2021}^{2}52^{2019}-\ldots+C_{2021}^{2020}52-C_{2021}^{2021}+a$，

因为 $51^{2021}+a$ 能被 13 整除，所以 $-C_{2021}^{2021}+a=-1+a$ 能被 13 整除，

所以 $a=1$，

故选：B.

【例20】设 n 为正奇数，则 $5^{n}+C_{n}^{1}5^{n-1}+C_{n}^{2}5^{n-2}+\cdots+C_{n}^{n-1}5$ 被 7 整除的余数为（　）.

$A.\ -2$　　　　$B.\ 0$　　　　$C.\ 3$　　　　$D.\ 5$

【解题思路】按照二项式定理将原式改写成 7 的倍数的形式，剩余的部分即为余数.

【解答过程】$5^{n}+C_{n}^{1}5^{n-1}+C_{n}^{2}5^{n-2}+\cdots+C_{n}^{n-1}5$

$=(C_{n}^{0}5^{n}+C_{n}^{1}5^{n-1}+C_{n}^{2}5^{n-2}+\cdots+C_{n}^{n-1}5^{1}+C_{n}^{n})-C_{n}^{n}$

$=(5+1)^{n}-1=6^{n}-1=(7-1)^{n}-1$

$=C_{n}^{0}7^{n}+C_{n}^{1}7^{n-1}(-1)+C_{n}^{2}7^{n-2}(-1)^{2}+\cdots+C_{n}^{n-1}7^{1}(-1)^{n-1}+C_{n}^{n}(-1)^{n}-1$

$=7[C_{n}^{0}7^{n-1}+C_{n}^{1}7^{n-2}(-1)+C_{n}^{2}7^{n-3}(-1)^{2}+\cdots+C_{n}^{n-1}(-1)^{n-1}-1]+5$.

$\because C_{n}^{0}7^{n-1}+C_{n}^{1}7^{n-2}(-1)+C_{n}^{2}7^{n-3}(-1)^{2}+\cdots+C_{n}^{n-1}\cdot(-1)^{n-1}-1$ 为整数，

故 $5^{n}+C_{n}^{1}5^{n-1}+C_{n}^{2}5^{n-2}+\cdots+C_{n}^{n-1}5$ 被 7 整除的余数为 5；

故选：D.

(六)【题型 6 杨辉三角问题】

解决与杨辉三角有关的问题的一般思路：

(1) 观察：对数据要横看、竖看、隔行看、连续看，多角度观察；

(2) 规律：通过观察找出每一行的数据之间、行与行的数据之间的规律；

(3) 表达：将发现的规律用数学式子表达出来；

(4) 结论：用数学表达式写出结论.

【例21】“杨辉三角”揭示了二项式系数在三角形中的一种几何排列规律，早在中国南宋数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》一书中出现. 如图，在由二项式系数所构成的“杨辉三角”中，若第 n 行中从左至右只有第 12 个数为该行中的最大值，则 $n=$（　　）

第0行　　　　　1

第1行　　　　1　1

第2行　　　1　2　1

第3行　　1　3　3　1

第4行　1　4　6　4　1

第5行 1　5　10　10　5　1

……　　　　……

A. 21　　B. 22　　C. 23　　D. 24

【解题思路】由题意可知，第 n 行的数就是二项式 $(a+b)^n$ 的展开式中各项的二项式系数，再利用二项式的系数的性质可求得结果.

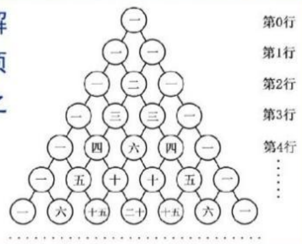
【解答过程】由题意可知，第 n 行的数就是二项式 $(a+b)^n$ 的展开式中各项的二项式系数.

因为只有第 12 项的二项式系数 C_n^{11} 最大，

所以 n 为偶数，故 $\dfrac{n}{2}=11$，解得 $n=22$，

故选：B.

【例22】如图，杨辉三角出现于我国南宋数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》中，它揭示了 $(a+b)^n$（n 为非负整数）展开式的项数及各项系数的有关规律. 由此可得图中第 10 行排在偶数位置的所有数字之和为（　　）



A. 256　　B. 512

C. 1024　　D. 1023

【解题思路】由图形以及二项式系数和的有关性质可得.

【解答过程】由图知，第 10 行的所有数字之和为 $C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3+C_{10}^4+C_{10}^5+C_{10}^6+C_{10}^7+C_{10}^8+C_{10}^9+C_{10}^{10}=2^{10}$，

由二项式系数和的性质知，第 10 行排在偶数位置的所有数字之和为 $\dfrac{1}{2}\times 2^{10}=512$.

故选：B.

【例23】我国南宋数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》就给出了著名的杨辉三角，由此可见我国古代数学的成就是非常值得中华民族自豪的. 以下关于杨辉三角的猜想中错误的是（　　）

第一行						1		1					
第二行					1		2		1				
第三行				1		3		3		1			
第三行			1		4		6		4		1		
第五行		1		5		10		10		5		1	
第六行	1		6		15		20		15		6		1

A. 由“与首末两端‘等距离’的两个二项式系数相等”猜想：$Cnm=Cnn^{-}m$

B. 由“在相邻的两行中，除 1 以外的每一个数都等于它‘肩上’两个数的和”猜想：$C_{n+1}^r=C_n^{r-1}+C_n^r$

C. 由“第 n 行所有数之和为 $2n$”猜想：$Cn^0+Cn^1+Cn^2+\cdots+Cnn=2n$

D. 由“$11^1=11$，$11^2=121$，$11^3=1331$”猜想：$11^5=15101051$

【解题思路】由组合数及二项式系数的性质可判断 A、B、C，由二项式定理运算可判断 D.

【解答过程】对于 A，由组合数的互补性质可得 $C_n^m=C_n^{n-m}$，故 A 正确；

对于 B，由组合数的性质可得 $C_n^{r-1}+C_n^r=C_{n+1}^r$，故 B 正确；

对于 C，由二项式系数和的性质可得 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$，故 C 正确；

对于 D，$11^5=(10+1)^5=10^5+5\times10^4+10\times10^3+10\times10^2+5\times10+1=161051$，

故 D 错误.

故选：D.

【例24】将杨辉三角中的奇数换成 1，偶数换成 0，便可以得到如图的“0 − 1 三角”. 在“0 − 1 三角”中，从第 1 行起，设第 $n(n\in N_+)$ 次出现全行为 1 时，1 的个数为 a_n，则 a_3 等于（　　）

第0行	1
第1行	1 1
第2行	1 0 1
第3行	1 1 1 1
第4行	1 0 0 0 1
第5行	1 1 0 0 1 1
… …	… …

A. 26　　*B*. 27　　*C*. 7　　*D*. 8

【解题思路】由于是将奇数换成1，故 C_n^r 都是奇数，分别验证 $n=6,7$ 时 C_n^r 的情况，直接得出正确选项.

【解答过程】第1行和第3行全是1，已经出现了2次，依题意，第6行原来的数是 C_6^r，而 $C_6^1=6$ 为偶数，不合题意；第7行原来的数是 C_7^r，即 $1,7,21,35,35,21,7,1$ 全为奇数，一共有8个，全部转化为1，这是第三次出现全为1的情况. 故选 *D*.

【高二同步重难点】条件概率与全概率公式题型考点与方法汇总

一、题型梳理

二、考点详解

(一)【知识点 1 条件概率】

(1) 条件概率的定义

一般地，设 A，B 为两个随机事件，且 $P(A)>0$，我们称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率，简称条件概率.

(2) 条件概率的性质：

设 $P(A)>0$，Ω 为样本空间，则

(1)$P(B|A)\in[0,1]$，$P(\Omega|A)=1$；

(2) 如果 B 和 C 是两个互斥事件，则 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$；

(3) 设 B 和 B 互为对立事件，则 $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$

2．概率的乘法公式

由条件概率的定义，对任意两个事件 A 与 B，若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B\quad A)$.

1.【题型 1 条件概率的计算】

【例1】连续抛掷一枚质地均匀的骰子 3 次，观察向上的点数．在第 1 次出现奇数的条件下，3 次出现的点数之积为偶数的概率为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{5}{8}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{7}{8}$

【解题思路】设第一次出现奇数为事件 A，3 次出现的点数之积为偶数为事件 B，结合条件概率的计算公式，即可求解.

【解答过程】设第一次出现奇数为事件 A，3 次出现的点数之积为偶数为事件 B，

则 $P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，$P(AB)=\dfrac{(3\times6\times6-3\times3\times3)}{6\times6\times6}=\dfrac{3}{8}$，

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{4}$.

故选：C.

【例2】已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，$P(B\cap A)=0.1$，求 $P(B|A)=$（　　）

A．$\dfrac{1}{10}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{5}$　　D．1

【解题思路】直接利用条件概率公式计算.

【解答过程】由题可得 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.1}{0.5}=\dfrac{1}{5}$.

故选：C.

【例3】甲、乙、丙、丁四名同学报名参加假期社区服务活动，社区服务活动共有关怀老人、环境监测、教育咨询、交通宣传四个项目，每人限报其中一项，记事件 A 为“四名同学所报项目各不相同”，事件 B 为“只有甲同学一人报关怀老人项目”，则 $P(A|B)$ 的值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{2}{9}$

【解题思路】由条件概率和独立事件的公式直接求解处理即可.

【解答过程】由题意得 $P(B)=\frac{3^3}{4^4}=\frac{27}{256}$，$P(AB)=\frac{A_3^3}{4^4}=\frac{6}{256}$，

故 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{6}{256}\times\frac{256}{27}=\frac{2}{9}$.

故选：D.

【例4】将甲、乙、丙、丁 4 名医生随机派往①，②，③三个村庄进行义诊活动，每个村庄至少派 1 名医生，A 表示事件“医生甲派往①村庄”；B 表示事件“医生乙派往①村庄”；C 表示事件“医生乙派往②村庄”，则（　　）

A. 事件 A 与 B 相互独立　　B. 事件 A 与 C 相互独立

C. $P(B|A)=\frac{5}{12}$　　D. $P(C|A)=\frac{5}{12}$

【解题思路】按相互独立的定义可判断 AB，用条件概率公式可判断 CD.

【解答过程】将甲、乙、丙、丁 4 名医生派往①，②，③三个村庄进行义诊包含 $C_4^2A_3^3=36$(个) 样本点，它们等可能，事件 A 含有的样本点个数为 $A_3^3+C_3^2A_2^2=12$，

则 $P(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$，

同理 $P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，

事件 AB 含有的样本点个数为 $A_2^2=2$，则 $P(AB)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$，

事件 AC 含有的样本点个数为 $C_2^2+C_2^1C_2^1=5$，则 $P(AC)=\frac{5}{36}$，

对于 A，$P(A)P(B)=\frac{1}{9}\neq P(AB)$，即事件 A 与 B 不相互独立，故 A 不正确；

对于 B，$P(A)P(C)=\frac{1}{9}\neq P(AC)$，即事件 A 与 C 不相互独立，故 B 不正确；

对于 C，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{6}$，故 C 不正确；

对于 D，$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{5}{12}$，故 D 正确.

故选：D.

2.【题型 2 条件概率性质的应用】

【例5】已知 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 分别为随机事件 A，B 的对立事件，$P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列说法正确的是（　　）

A. $P(B|A)+P(\overline{B}|A)=P(A)$　　B. 若 $P(A)+P(B)=1$，则 A，B 对立

C. 若 A，B 独立，则 $P(A|B)=P(A)$　　D. 若 A，B 互斥，则 $P(A|B)+P(B|A)=1$

【解题思路】利用条件概率的概率公式以及独立事件与对立事件的概率公式，对四个选项进行分析判断，即可得到答案；

【解答过程】对 A，$P(B|A)+P(\overline{B}|A)=\dfrac{P(AB)+P(A\overline{B})}{P(A)}=\dfrac{P(A)}{P(A)}=1$，故 A 错误；

对 B，若 A，B 对立，则 $P(A)+P(B)=1$，反之不成立，故 B 错误；

对 C，根据独立事件定义，故 C 正确；

对 D，若 A，B 互斥，则 $P(A|B)+P(B|A)=0$，故 D 错误；

故选：C.

【例6】已知 $P\left(B\middle|A\right)=\dfrac{1}{3}$，$P(A)=\dfrac{2}{5}$，则 $P(AB)=$（　　）

A．$\dfrac{5}{6}$　　B．$\dfrac{9}{10}$　　C．$\dfrac{2}{15}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

【解题思路】由条件概率的计算公式求解即可.

【解答过程】由题意，知 $P(AB)=P\left(B\middle|A\right)P(A)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{15}$.

故选：C.

【例7】已知事件 A，B，C 满足 A，B 是互斥事件，且 $P\left((A\cup B)\middle|C\right)=\dfrac{1}{2}$，$P(BC)=\dfrac{1}{12}$，$P(C)=\dfrac{1}{4}$，则 $P\left(A\middle|C\right)$ 的值等于（　　）

A．$\dfrac{1}{6}$　　B．$\dfrac{1}{12}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

【解题思路】根据条件概率的公式，以及概率的加法公式，可得答案.

【解答过程】由题意，$P\left(B\middle|C\right)=\dfrac{P(BC)}{P(C)}=\dfrac{1}{3}$，由 A，B 是互斥事件知，$P\left((A\cup B)\middle|C\right)=P\left(A\middle|C\right)+P\left(B\middle|C\right)$，

所以 $P\left(A\middle|C\right)=P\left((A\cup B)\middle|C\right)-P\left(B\middle|C\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，

故选：A.

【例8】已知 $P(B)>0$，$A_1A_2=\phi$，则下列式子成立的是（　　）

① $P(A_1|B)>0$；

② $P((A_1\cup A_2)|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$；

③ $P(A_1\overline{A_2}|B)\neq 0$；

④ $P(\overline{A_1A_2}|B)=1$.

A．①②③④　　B．②　　C．②③　　D．②④

【解题思路】利用条件概率公式及概率性质辨析

【解答过程】①若 $A_1B=\phi$ 则 $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=0$，故 $P(A_1|B)\geqslant 0$，故①错误；

②因为 $A_1A_2=\phi$ 所以 $(A_1B)(A_2B)=\phi P((A_1\cup A_2)|B)=\dfrac{P((A_1\cup A_2)B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1B\cup A_2B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)}=P(A_1|B)+P(A_2|B)$ 所以②正确；

③若 $A_1B=\phi$ 或 $\overline{A_2}B=\phi$ 则 $P(A_1\overline{A_2}|B)=0$ 故③错误；

④若 $\overline{A_1}B=\phi$ 或 $\overline{A_2}B=\phi$ 则 $P(\overline{A_1A_2}|B)=0$ 故④错误.

故选：B.

(二)【知识点 2 全概率公式】

1．全概率公式及应用

一般地，设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是一组两两互斥的事件，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，且$P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任意的事件$B\subseteq\Omega$，有$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$. 我们称此公式为全概率公式.

2. 全概率公式的意义

全概率公式的意义在于，当直接计算事件B发生的概率$P(B)$较为困难时，可以先找到样本空间Ω的一个划分$\Omega=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互斥，将$A_1,A_2,\cdots,A_n$看成是导致$B$发生的一组原因，这样事件$B$就被分解成了$n$个部分，分别计算$P(B|A_1),P(B|A_2),\cdots,P(B|A_n)$，再利用全概率公式求解.

2．贝叶斯公式

设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是一组两两互斥的事件，$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，且$P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任意事件$B\subseteq\Omega$，$P(B)>0$，有$P(A_i|B)=\dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}=\dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}$，$i=1,2,\cdots,n$.

贝叶斯公式是在条件概率的基础上寻找事件发生的原因，在运用贝叶斯公式时，一般已知和未知条件如下：

(1)A的多种情况中到底哪种情况发生是未知的，但是每种情况发生的概率已知，即$P(A_i)$已知;

(2)事件B是已经发生的确定事实，且A的每种情况发生的条件下B发生的概率已知，即$P(B|A_i)$已知;

(3)$P(B)$未知，需要使用全概率公式计算得到;

(4)求解的目标是用A的某种情况A_i的无条件概率求其在B发生的条件下的有条件概率$P(A_i|B)$.

1.【题型3 利用全概率公式求概率】

【例9】在2023亚运会中，中国女子篮球队表现突出，卫冕亚运会冠军，该队某球员被称为3分球投手，在比赛中，她3分球投中的概率为$\frac{3}{4}$，非3分球投中的概率为$\frac{4}{5}$，且她每次投球投3分球的概率为$\frac{2}{3}$，则该球员投一次球得分的概率为（　　）

A．$\frac{3}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{23}{30}$　　D．$\frac{17}{30}$

【解题思路】根据全概率公式即可求解.

【解答过程】设事件A为“该球员投球得分”，事件B为“该球员投中3分球得分”，

由全概率公式：$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{23}{30}$，

故选：C.

【例10】小明家附近有甲、乙两家影院，小明第一天去甲、乙两家影院观影的概率分别为$\frac{2}{5}$和$\frac{3}{5}$．如果他第一天去甲影院，那么第二天去甲影院的概率为$\frac{3}{5}$；如果他第一天去乙影院，那么第二天去甲影院的概率为$\frac{1}{2}$．若小明第二天去了甲影院，则第一天去乙影院的概率为（　　）

A．$\frac{23}{50}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{5}{9}$

【解题思路】设出事件，根据条件概率公式得到$P(AB)=\frac{6}{25},P(BC)=\frac{3}{10}$，结合全概率公式求出答案.

【解答过程】设小明第一天去甲影院为事件 A，第二天去甲影院为事件 B，小明第一天去乙影院为事件 C，第二天去乙影院为事件 D.

故 $P(A)=\frac{2}{5}, P(C)=\frac{3}{5}, P\left(B \middle| A\right)=\frac{3}{5}, P\left(B \middle| C\right)=\frac{1}{2}$，

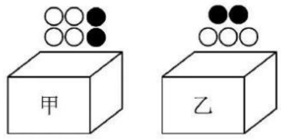
由 $P\left(B \middle| A\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3}{5}, P\left(B \middle| C\right)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{1}{2}$ 可得 $P(AB)=\frac{6}{25}, P(BC)=\frac{3}{10}$，

故 $P(B)=P(AB)+P(CB)=\frac{6}{25}+\frac{3}{10}=\frac{27}{50}$，

则小明第二天去了甲影院，则第一天去乙影院的概率为 $P\left(C \middle| B\right)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{27}{50}}=\frac{5}{9}$.

故选：D.

【例11】现有完全相同的甲，乙两个箱子 (如图)，其中甲箱装有 2 个黑球和 4 个白球，乙箱装有 2 个黑球和 3 个白球，这些球除颜色外完全相同．某人先从两个箱子中任取一个箱子，再从中随机摸出一球，则摸出的球是黑球的概率是（　　）



$A.\ \frac{11}{15}$　　$B.\ \frac{11}{30}$　　$C.\ \frac{1}{15}$　　$D.\ \frac{2}{15}$

【解题思路】根据条件概率的定义，结合全概率公式，可得答案.

【解答过程】记事件 A 表示“球取自甲箱”，事件 $\overline{A}$ 表示“球取自乙箱”，事件 B 表示“取得黑球”，

则 $P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}, P\left(B \middle| A\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, P\left(B \middle| \overline{A}\right)=\frac{2}{5}$，

由全概率公式得 $P(A)P\left(B \middle| A\right)+P(\overline{A})P\left(B \middle| \overline{A}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{30}$.

故选：B.

【例12】甲、乙两个袋子中各装有 5 个大小相同的小球，其中甲袋中有 2 个红球，2 个白球和 1 个黑球，乙袋中有 3 个红球，1 个白球和 1 个黑球，先从甲袋中随机取出一球放入乙袋，再从乙袋中随机取出一球. 若用事件 A_1, A_2 和 A_3 分别表示从甲袋中取出的球是红球，白球和黑球，用事件 B 表示从乙袋中取出的球是红球，则 $P(B)=$（　　）

$A.\ \frac{17}{30}$　　$B.\ \frac{3}{5}$　　$C.\ \frac{9}{22}$　　$D.\ \frac{4}{11}$

【解题思路】由全概率公式可得.

【解答过程】易知 $P(A_1)=\frac{2}{5}, P(A_2)=\frac{2}{5}, P(A_3)=\frac{1}{5}$，

$P(B|A_1)=\frac{4}{6}, P(B|A_2)=\frac{3}{6}, P(B|A_3)=\frac{3}{6}$，

所以 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{17}{30}$.

故选：A.

2.【题型 4 利用贝叶斯公式求概率】

【例13】根据曲靖一中食堂人脸识别支付系统后台数据分析发现，高三年级小孔同学一周只去食堂一楼和二楼吃饭．周一去食堂一楼和二楼的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$，若他周一去了食堂一楼，那么周二去食堂二楼的概率为 $\frac{3}{4}$，若他周一去了食堂二楼，那么周二去食堂一楼的概率为 $\frac{1}{2}$，现已知小孔同学周二去了食堂二楼，则周一去食堂一楼的概率为().

A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{4}{7}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

【解题思路】利用贝叶斯概率公式求解即可.

【解答过程】记小孔同学周一去食堂一楼为事件A,周二去食堂一楼为事件B,

则本题所求 $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(\overline{B}|A)\cdot P(A)}{P(\overline{B}|A)\cdot P(A)+P(\overline{B}|\overline{A})\cdot P(\overline{A})}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{7}$.

故选:A.

【例14】根据以往的临床记录,某种诊断癌症的试验有如下的效果:若以A表示事件“试验反应为阳性”,以C表示事件“被诊断者患有癌症”,则有$P(A|C)=0.95$,$P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$.现在对自然人群进行普查,设被试验的人患有癌症的概率为0.005,即$P(C)=0.005$,则$P(C|A)\approx$(　　)

A. 0.087　　B. 0.950　　C. 0.050　　D. 0.475

【解题思路】根据条件概率的性质及变式可求得$P(A|\overline{C})$,由已知可求得$P(\overline{C})=0.995$,根据贝叶斯公式可求得答案.

【解答过程】解:因为$P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$,所以$P(A|\overline{C})=1-P(\overline{A}|\overline{C})=0.05$,

因为$P(C)=0.005$,所以$P(\overline{C})=0.995$,

所以由全概率公式可得$P(A)=P(A|C)\cdot P(C)+P(A|\overline{C})\cdot P(\overline{C})$,

因为$P(AC)=P(C|A)P(A)=P(A|C)P(C)$,

所以 $P(C|A)=\dfrac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C)+P(A|\overline{C})P(\overline{C})}=\dfrac{0.95\times0.005}{0.95\times0.005+0.05\times0.995}=\dfrac{19}{218}$.

所以 $P(C|A)=\dfrac{19}{218}\approx0.087$.

故选:A.

【例15】一道考题有4个答案,要求学生将其中的一个正确答案选择出来.某考生知道正确答案的概率为$\frac{1}{3}$,在乱猜时,4个答案都有机会被他选择,若他答对了,则他确实知道正确答案的概率是(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

【解题思路】利用全概率公式以及贝叶斯公式即可求解.

【解答过程】设A表示“考生答对”,B表示“考生知道正确答案”,

由全概率公式得 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{1}{3}\times1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

又由贝叶斯公式得 $P(B|A)=\dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$.

故选:B.

【例16】托马斯·贝叶斯(ThomasBayes)在研究“逆向概率”的问题中得到了一个公式:$P(A_i|B)=\dfrac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)}$,这个公式被称为贝叶斯公式(贝叶斯定理),其中$\sum\limits_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)$称为$B$的全概率.假设甲袋中有3个白球和2个红球,乙袋中有2个白球和2个红球.现从甲袋中任取2个球放入乙袋,再从乙袋中任取2个球.已知从乙袋中取出的是2个白球,则从甲袋中取出的也是2

个白球的概率为（　　）

$A.\ \frac{37}{150}$　　　$B.\ \frac{9}{75}$　　　$C.\ \frac{18}{37}$　　　$D.\ \frac{1}{2}$

【解题思路】根据题意，先分析求解设从甲中取出 2 个球，其中白球的个数为 i 个的事件为 A_i，事件 A_i 的概率为 $P(A_i)$，从乙中取出 2 个球，其中白球的个数为 2 个的事件为 B，事件 B 的概率为 $P(B)$，再分别分析 $i=0,1,2$ 三种情况求解即可

【解答过程】设从甲中取出 2 个球，其中白球的个数为 i 个的事件为 A_i，事件 A_i 的概率为 $P(A_i)$，从乙中取出 2 个球，其中白球的个数为 2 个的事件为 B，事件 B 的概率为 $P(B)$，由题意：

① $P(A_0)=\frac{C_2^2C_3^0}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，$P(B|A_0)=\frac{C_2^2C_4^0}{C_6^2}=\frac{1}{15}$；

② $P(A_1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，$P(B|A_1)=\frac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}=\frac{1}{5}$；

③ $P(A_2)=\frac{C_2^0C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，$P(B|A_2)=\frac{C_4^2C_2^0}{C_6^2}=\frac{2}{5}$；

根据贝叶斯公式可得，从乙袋中取出的是 2 个红球，则从甲袋中取出的也是 2 个红球的概率为

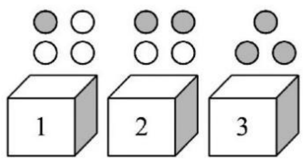
$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}}{\frac{1}{10}\times\frac{1}{15}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}}=$$

$$\frac{6}{1+9+6}=\frac{18}{37}$$

故选：C.

3.【题型 5 条件概率与全概率公式的综合应用】

【例17】如图，有三个外形相同的箱子，分别编号为 1，2，3，其中 1 号箱装有 1 个黑球和 3 个白球，2 号箱装有 2 个黑球和 2 个白球，3 号箱装有 3 个黑球，这些球除颜色外完全相同．小明先从三个箱子中任取一箱，再从取出的箱中任意摸出一球，记事件 $A_i(i=1,2,3)$ 表示"球取自第 i 号箱"，事件 B 表示"取得黑球".



(1) 求 $P(B)$ 的值：

(2) 若小明取出的球是黑球，判断该黑球来自几号箱的概率最大？请说明理由.

【解题思路】(1) 因先从三个箱子中任取一箱，再从取出的箱中任意摸出一球为黑球，其中有三种可能，即黑球取自于 1 号，2 号或者 3 号箱，故事件 B 属于全概率事件，分别计算出 $P(A_i)$ 和 $P(B|A_i)$，$i=1,2,3$，代入全概率公式即得；

(2) 由"小明取出的球是黑球，判断该黑球来自几号箱"是求条件概率 $P(A_i|B)$，$i=1,2,3$，根据条件概率公式分别计算再比较即得.

【解答过程】(1) 由已知得：$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$，$P(B|A_1)=\frac{1}{4}$，$P(B|A_2)=\frac{1}{2}$，$P(B|A_3)=1$，而 $P(BA_1)=P(B|A_1)\cdot P(A_1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，$P(BA_2)=P(B|A_2)\cdot P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，$P(BA_3)=P(B|A_3)\cdot P(A_3)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

由全概率公式可得：$P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$.

(2) 因"小明取出的球是黑球，该黑球来自 1 号箱"可表示为：A_1B，

其概率为 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{1}{7}$，

“小明取出的球是黑球,该黑球来自 2 号箱”可表示为: A_2B, 其概率为 $P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}}=\frac{2}{7}$,

“小明取出的球是黑球,该黑球来自 3 号箱”可表示为: A_3B, 其概率为 $P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}}=\frac{4}{7}$.

综上, $P(A_3|B)$ 最大,即若小明取出的球是黑球,可判断该黑球来自 3 号箱的概率最大.

【例18】某城市有甲、乙两个网约车公司,相关部门为了更好地监管和服务,通过问卷调查的方式,统计当地网约车用户(后面简称用户,并假设每位用户只选择其中一家公司的网约车出行)对甲,乙两个公司的乘车费用,等待时间,乘车舒适度等因素的评价,得到如下统计结果:

①用户选择甲公司的频率为 0.32,选择乙公司的频率为 0.68:

②选择甲公司的用户对等待时间满意的频率为 0.62,选择乙公司的用户对等待时间满意的频率为 0.78;

③选择甲公司的用户对乘车舒适度满意的频率为 0.68,选择乙公司的用户对乘车舒适度满意的频率为 0.61;

④选择甲公司的用户对乘车费用满意的频率为 0.21,选择乙公司的用户对乘车费用满意的频率为 0.32.

将上述随机事件发生的频率视为其发生的概率.

(1) 分别求出网约车用户对等待时间满意、乘车舒适度满意、乘车费用满意的概率,并比较用户对哪个因素满意的概率最大,对哪个因素满意的概率最小.

(2) 若已知某位用户对乘车舒适度满意,则该用户更可能选择哪个公司的网约车出行?并说明理由.

【解题思路】(1) 利用全概率公式可计算出用户网约车用户对等待时间满意、乘车舒适度满意、乘车费用满意的概率,即可得出结论;

(2) 利用条件概率公式计算出该用户对甲、乙两个公司网约车舒适度满意率,比较大小后可得出结论.

【解答过程】(1) 解:设事件 M: 用户选择甲公司的网约车出行,事件 A: 用户对等待时间满意,

事件 B: 用户对乘车舒适度满意,事件 C: 用户对乘车费用满意.

则 $P(A)=P(M)P(A|M)+P(\overline{M})P(A|\overline{M})=0.32\times0.62+0.68\times0.78=0.7288$,

$P(B)=P(M)P(B|M)+P(\overline{M})P(B|\overline{M})=0.32\times0.68+0.68\times0.61=0.6324$,

$P(C)=P(M)P(C|M)+P(\overline{M})P(C|\overline{M})=0.32\times0.21+0.68\times0.32=0.2848$

所以,用户对等待时间满意的概率最大,对乘车费用满意的概率最小.

(2) 解:由题知, $P(M|B)=\frac{P(MB)}{P(B)}=\frac{0.32\times0.68}{0.6324}=\frac{544}{1581}$,

$P(\overline{M}|B)=\frac{P(\overline{M}B)}{P(B)}=\frac{0.68\times0.61}{0.6324}=\frac{1037}{1581}$,

所以, $P(M|B)<P(\overline{M}|B)$,故该用户选择乙公司出行的概率更大.

【例19】第三次人工智能浪潮滚滚而来,以 *ChatGPT* 发布为里程碑,开辟了人机自然交流的新纪元. *ChatGPT* 所用到的数学知识并非都是遥不可及的高深理论,概率就被广泛应用于 *ChatGPT* 中.

某学习小组设计了如下问题进行探究：甲和乙两个箱子中各装有 5 个大小相同的小球，其中甲箱中有 3 个红球、2 个白球，乙箱中有 4 个红球、1 个白球.

(1) 从甲箱中随机抽出 2 个球，在已知抽到红球的条件下，求 2 个球都是红球的概率；

(2) 掷一枚质地均匀的骰子，如果点数小于等于 4，从甲箱子随机抽出 1 个球；如果点数大于等于 5，从乙箱子中随机抽出 1 个球．若抽到的是红球，求它是来自乙箱的概率.